MERNE JEDINICE

- decibel uvek pokazuje odnos dveju veličina
- dB = 10 log (P_1/P_2)
- primer 2:1 > odnos snaga = 3 dB
- primer 10:1 > odnos snaga = 10 dB
- snaga je proporcionalna kvadratu napona
- $L[dB]_{napon} = 20 \log (U_1/U_2)$
- primer 2:1 > odnos napona = 6 dB
- primer 10:1 > odnos napona = 20 dB

dBm

- ova jedinica prikazuje nivo snage u odnosu na 1 mW; dakle **0 dBm = 1mW**

- **Zadatak 1.** Signal putuje od tačke A do tačke B. U tački A snaga signala je 100W. U tački B snaga signala je 90W. Koliko je slabljenje u dB?

Rešenje:

Slabljenje signala u dB predstavlja vrednost od 10 logaritama odnosa snage u početnoj tački u odnosu na snagu u krajnjoj tački:

$$a = 10\log\left(\frac{P_A}{P_B}\right) = 10\log\left(\frac{100}{90}\right) = 0.457\ [dB]$$

- **Zadatak 2.** Slabljenje signala je -10 dB. Kolika je snaga signala u krajnjoj tački, ako je snaga signala u početnoj tački 5 W ?

Rešenje:

$$a = -10dB = 10\log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 10^{(a/10)} = 10^{-1} = 0.1 \Rightarrow$$

$$P_2 = P_1 / 0.1 = 50\,[W]$$

Snaga signala u krajnjoj tački je 50W. Snaga signala je povećana, što je logično jer je slabljenje u dB imalo negativnu vrednost, tj. reč je o pojačanju.

- **Zadatak 3.** Signal prolazi kroz tri kaskadno vezana pojačavača, pri čemu svaki ima pojačanje od 4 dB. Koliko je ukupno pojačanje? Koliko je puta signal pojačan?

Rešenje:

Na osnovu osobine sabiranja pojačanja u [dB] kada je reč o kaskadno vezanim pojačavačima u dB imamo da je ukupno pojačanje 12dB. Ako sa *A* označimo pojačanje signala u linearnoj razmeri onda je:

$$12dB = 10\log A \Rightarrow A = 15.85$$

Znači signal je pojačan 15.85 puta. Budući da pojačanje od 3dB označava približno dvostruko pojačanje signala, a pošto u 12dB imamo 4·3dB, na osnovu toga možemo smatrati da je signal ukupno pojačan približno $2^4 = 16$ puta.

- **Zadatak 4.** Ako je protok na mestu konekcije uređaja i medijuma za prenos 5kb/s, koliko je potrebno vremena da bi se poslalo 0.1 Mb iz uređaja?

Rešenje:

$$0.1\,Mb = 100\,kb \quad \Rightarrow \quad t = \frac{100kb}{5kb/s} = 20\left[s\right]$$

- **Zadatak 5.** Svetlosti je potrebno približno 8 minuta da sa Sunca stigne do Zemlje. Koliko je rastojanje od Zemlje do Sunca?

Rešenje:

Neka je brzina svetlosti određena sa 300000km/s, što znači da je rastojanje između Sunca i Zemlje približno:

$$d = ct = 300000km/s \cdot 8\min = 300000km/s \cdot 480s = 144 \cdot 10^{6}\left[km\right]$$

- **Zadatak 6.** Signal ima talasnu dužinu 10^{-6} m u vazduhu. Koliko daleko signal može da se propagira za vreme 7 perioda?

Rešenje:

Trajanje periode je:

$$T=\lambda/c=\frac{10^{-6}m}{3\cdot 10^{8}m/s}=\frac{1}{3}10^{-14}s$$

Put koji signal pređe za 7 perioda je:

$$d=ct=c\cdot 7T=3\cdot 10^{8}m/s\cdot 7\cdot\frac{1}{3}10^{-14}s=7\mu m$$

Naravno ovaj rezultat smo mogli odmah dobiti da smo uzeli u obzir fizičko tumačenje talasne dužine. Na osnovu izraza $\lambda=cT$ da je vidimo da je talasna dužina rastojanje koje signal pređe za vreme trajanja jedne periode, pa pošto se traži rastojanje koje će signal preći za 7 perioda onda je ono jednako 7 talasnih dužina tj. $7\mu m$.

Poruka i signal

- U telekomunikacijama je uobičajeno da se informacije nazivaju ***porukama***. Fizička predstava informacije naziva se ***signal***. Signal je električni lik poruke. To znači da će se informacija o nekom događaju prenositi uvek pomoću signala.
- Prema svojoj prirodi signali se mogu podeliti na: ***determinističke*** i ***slučajne***.
- Deterministički signali su signali čiji je vremenski oblik uvek poznat, tj. čije se ponašawe može opisati matematičkim izrazom.
- Slučajni signali su signali koji se ne mogu opisati matematičkim izrazom zbog toga što su trenutne vrednosti ovakvih signala slučajnog karaktera. Tipični primer slučajnih signala je govorni signal.

Analiza periodičnih signala

- Svaku periodičnu funkciju, uz određena, za nas ne mnogo bitna ograničenja sa matematičke strane, možemo da predstavimo u obliku harmonijskog Furijeovog reda, da rastavimo u Furijeov red oblika:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(Q_n \cos n\omega_1 t + P_n \sin n\omega_1 t \right)$$

koji predstavlja zbir jednosmerne komponente signala (matematički i fizički srednje vrednosti signala):

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\, dt$$

i prostoperiodičnih komponenti oblika: $Q_n \cos n\omega_1 t$ i $P_n \sin n\omega_1 t$,

čije su amplitude date izrazima:

$$Qn = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t\, dt$$

$$Pn = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t\, dt$$

- Osnovna kružna učestanost, tj. učestanost osnovnog ili prvog harmonika data je izrazom: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ f_1$

Na osnovu ovoga se vidi da se perioda *T* prvog harmonika poklapa sa periodom datog signala *s*(*t*).

Pošto je učestanost prvog harmonika $f_1 = 1\ /\ T$, učestanost *n*-tog harmonika je $f_n = n\ f_1$, a njegova kružna učestanost je $\omega_n = n\ \omega 1 = n\ 2\ \pi\ \ f\ _1$.

Osim ovog oblika Furijeovog reda, kojim može da se predstavi lik signala, postoji i drugi, nešto prostiji, oblik koji se vrlo često koristi i koji predstavlja sažeti vid prvog oblika Furijeovog reda:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \left(\cos n\omega_1 t + \varphi_n\right)$$

U ovom slučaju je srednja vrednost signala, član $a_0 / 2$, ista kao i ranije, amplituda n-tog harmonika je data izrazom: $S_n = \sqrt{P_n^2 + Q_n^2}$

gde su P_n i Q_n određeni za prvi oblik Furijeovog reda.

- Ugao φ_n predstavlja fazni stav *n*-te harmonijske komponente signala u početnom trenutku vremena i dat je izrazom:

$$tg\,\varphi_n = -\frac{P_n}{Q_n}$$

Furijeov red može da se predstavi i u kompleksnom obliku:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{S_n} e^{jn\omega_1 t}$$

U ovom izrazu kompleksnu amplitudu harmonika definišemo kao

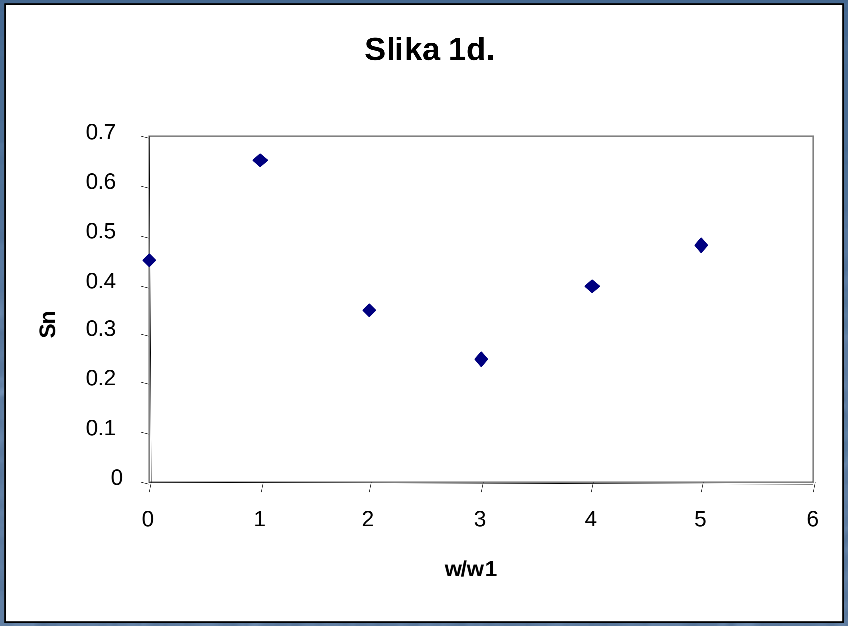
$$\underline{S_n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(Q_n - jP_n\right) & za \quad n > 0 \\ \frac{1}{2}\left(Q_{-n} + jP_{-n}\right) & za \quad n < 0 \end{cases}$$

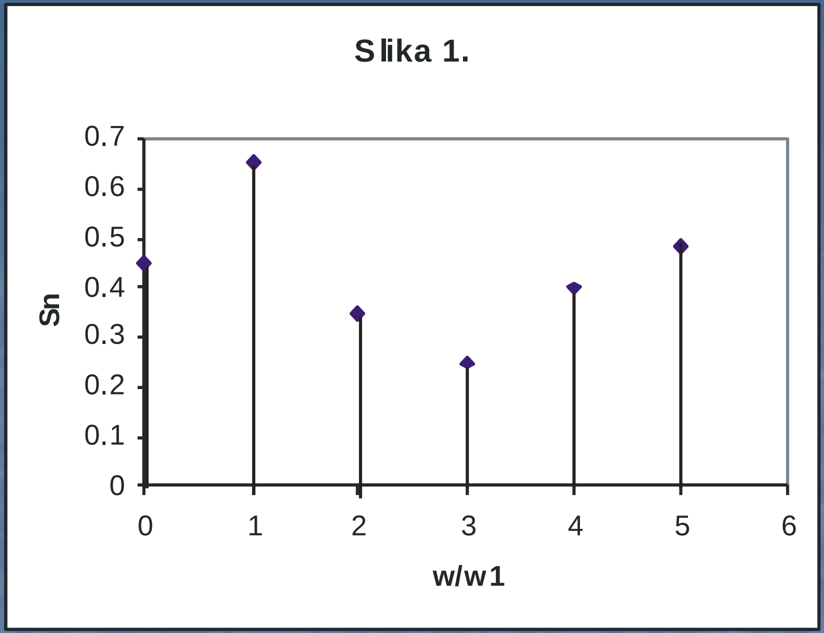
Za ovaj oblik Furijeovog reda važi $\underline{S_n} = S_n e^{j\varphi_n}$

gde je $\underline{S_n}$ amplituda, a φ_n faza *n*-tog harmonika Furijeovog reda.

Često je prilikom rešavanja praktičnih zadataka, a naročito kada je potrebno da se tokom rada vrše operacije diferenciranja i integraljenja, mnogo zgodnije da se koristi kompleksni oblik Furijeovog reda, nego prva dva trigonometrijska oblika.

- Skup veličina S_n ili Q_n i P_n naziva se amplitudski spektar, a skup veličina φ_n naziva se fazni spektar posmatranog signala i ova dva spektra potpuno karakterišu dati signal.
- Pošto se češće koristi samo amplitudski spektar, to ćemo njega prosto zvati spektar.
- Spektar periodične funkcije može se grafički predstaviti kao zavisnost amplitude (S_n ili Q_n i P_n) odnosno faze (φ_n) od kružne učestanosti, tj. harmonika osnovne kružne učestanosti- $n\omega_1$.
- U ovom koordinatnom sistemu spektar je predstavljen skupom diskretnih tačaka gde svakoj vrednosti $n\omega_1$ odgovara samo jedna vrednost S_n. Ovakav spektar je predstavljen na slici 1d., ali pošto nije praktičan za rad, usvojeno je da se amplitude pojedinih harmonika, predstavljaju u određenoj razmeri, odsečcima normala iz tačaka diskretnog spektra na osu učestanosti, te ovako modifikovani spektar ima oblik kao na slici 1.





- Potpuna analogija važi i za fazne spektre spektre.
- Važno je uočiti da za razne oblike Furijeovog reda amplituda jednosmernog člana u svim tim različitim oblicima ima istu vrednost i da su svi oblici reda međusobno povezani, te se lako može prelaziti sa jednog oblika na drugi.
- Amplituda svake spektralne komponente trigonometrijskog oblika Furijeovog reda, čija je učestanost $n\omega_1$, ustvari predstavlja zbir amplituda komponenti čije su učestanosti $n\omega_1$ i $-n\omega_1$ iz kompleksnog oblika Furijeovog reda. U kompleksnom spektralnom domenu, dakle važi da je amplitudski spektar parna funkcija učestanosti, afazni neparna funkcija učestanosti.

- Razlaganje pojedinih funkcija u Furijeove redove može da se znatno uprosti ako imamo u vidu sledeće osobine funkcije $s(t)$:
  - Ako je $s(t)$ funkcija koja ima iste površine ispod i iznad apscisne ose, onda je jednosmerni član jednak nuli $\frac{a_0}{2}=0$
  - Ako je $s(t)$ parna funkcija, $s(t)=s(-t)$, onda imamo samo harmonike kosinusoidalnog oblika $\rightarrow$ $P_n=0$.
  - Ako je $s(t)$ neparna funkcija, $s(t)=-s(-t)$, onda Furijeov red sadrži samo sinusoidalne komponente $\rightarrow$ $Q_n=0$.
  - Ako je $s(t)$ simetrična funkcija u odnosu na apscisnu osu ako izmenimo mesto njenim dvema poluperiodama, $s(t)=-s(t+T/2)$ onda Furijeov red ima samo neparne harmonike.

- Pri rastavljanju funkcija u Furijeove redove moramo imati na umu:
  - Da je potrebno da funkciju posmatramo u intervalu od jedne cele periode, pri čemu ovaj interval može da se uzme počev od bilo koje tačke na apscisi.
  - Da pri određivanju amplituda harmonika parnih ili neparnih funkcija dovoljno da funkciju posmatramo u intervalu od samo jedne poluperiode.
  - Da pomeranje apscise gore-dole duž ordinatne ose menja samo jednu komponentu i to jednosmernu komponentu.
  - Da pomeranje ordinatne ose levo desno utiče samo na fazu harmonika.

Ako neki prostoperiodični električni signal deluje na neku otpornost R, na toj otpornosti se razvij $s(t)$ naga:

$$P \sim S_{eff}^{2}$$

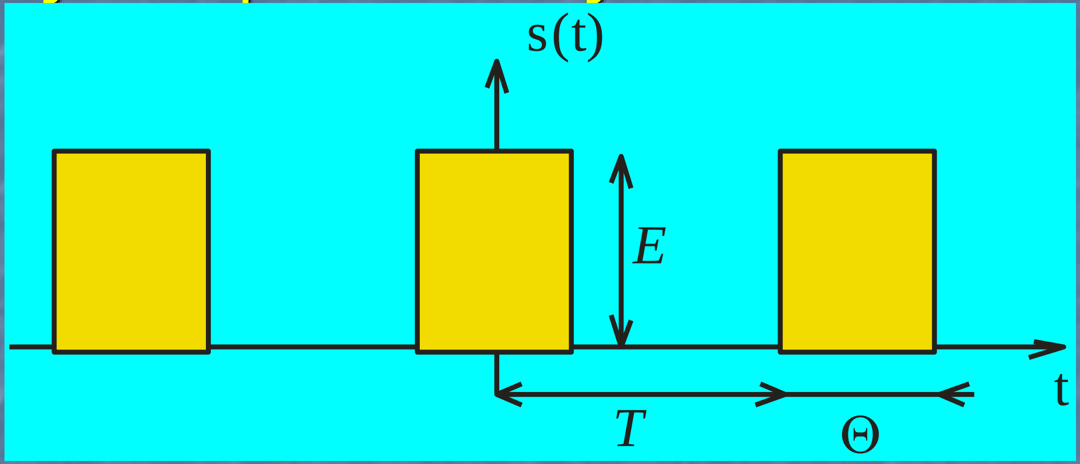
- Ako na tu otpornost deluje više prostoperiodičnih signala, svaki od tih signala doprinosi ukupnoj snazi i ukupna snaga koja se razvija na toj otpornosti data je zbirom ovih *parcijalnih* snaga: $P \sim S_{1eff}^2 + S_{2eff}^2 + \dots$

Neka je sada, zbir ovih prostoperiodičnih komponenti ustvari naš signal $s(t)$, koji smo razvili u Furijeov red. Neposredno se dobija da je efektivna vrednost složenoperiodičnog signala $s(t)$ data izrazom:

$$\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^2$$

koji je poznat pod nazivom ***Parsevalova teorema***.

- **Zadatak 7.** Povorku pravougaonih impulsa proizvoljnog trajanja i proizvoljne učestanosti, razviti u Furijeov red, posmatrajući je kao parnu funkciju vremena.



- Da bi nam rad bio lakši prvo smo nacrtali ovaj niz impulsa, gde je ***E***-amplituda impulsa, **θ**-trajanje impulsa, a ***T***-perioda ponavljanja impulsa.
- Definišimo najpre ovu funkciju. Pošto je funkcija parna, možemo da se zadovoljimo definisanjem samo u intervalu od jedne polovine periode. Dakle, imamo:

$$s(t)=\begin{cases} E & za \quad 0<t<\theta/2 \\ 0 & za \quad \theta/2<t<T/2 \end{cases}$$

- Opšti oblik Furijeovog reda glasi:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin n\omega_1 t$$

gde je: $S_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt$

srednja vrednost funkcije, a ostali članovi su:

$$Qn = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos n\omega_1 t\, dt \qquad Pn = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin n\omega_1 t\, dt$$

Iz izraza za član Q_n dobijamo za $n=0$ da je $Q_0 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)dt = 2S_0$

Sada je izraz za Furijeov red: $s(t) = \frac{Q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin n\omega_1 t$

U našem slučaju imamo da je

$$Q_0 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{4E}{T}\int_0^{\theta/2} dt = \frac{4E}{T}\frac{\theta}{2} = 2E\frac{\theta}{T} = 2\alpha E$$

- Parametar $\alpha = \theta / T$ nazivamo faktor režima i on definiše relativnu širinu impulsa u odnosu na periodu ponavljanja impusa u periodičnoj povorci impulsa. Za parnu funkciju imamo da je

$$Qn = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} s(t)\cos\omega_1 t\, dt \qquad \wedge \qquad P_n = 0$$

$$Q_n = \frac{4}{T}\int_0^{\theta/2} E\cos n\omega_1 t\, dt = \frac{4E}{T}\int_0^{\theta/2}\cos n\omega_1 t\, dt = \frac{4E}{T}\left[\frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1}\right]_0^{\theta/2} =$$

pa je

$$= \frac{4E}{T}\,\frac{\sin n\omega_1 \frac{\theta}{2}}{n\omega_1} = \frac{4E}{T}\,\frac{\sin n2\pi f_1 \frac{\theta}{2}}{n2\pi f_1}$$

Imajući u vidu da je $f\theta = \frac{\theta}{T} = \alpha$ i $T f = 1$, možemo pisati

$$Q_n = 2E\,\frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi} = 2\alpha E\,\frac{\sin n\pi\alpha}{n\pi\alpha}$$

- Konačni oblik trigonometrijskog oblika Furijeovog razvoja za parnu funkciju povorke pravougaonih impulsa je:

$$s(t) = \alpha E + 2\alpha E \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha\pi}{n\alpha\pi} \cos n\omega_1 t \right)$$

- Iz ovog izraza koji ustvari predstavlja Furijeov niz za povorku pravougaonih impulsa proizvoljnog trajanja, stavljajući $\alpha = 0.5$, dobijamo izraz za povorku pravougaonih impulsa specijalnog oblika, kod koje impuls traje isto koliko i pauza (kvadratni impulsi):

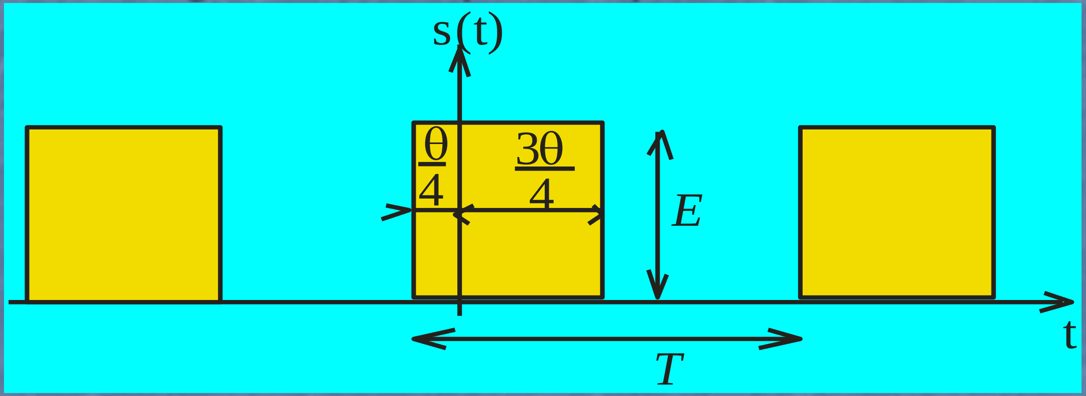
$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos n\omega_1 t \right)$$

čiji je razvijeni oblik sledeći

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left(\cos\omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + ... \right)$$

Ovaj izraz sadrži samo neparne harmonike, što smo i ranije mogli da zakljičimo, jer je naš signal zadovoljavao uslove slikovne simetrije, koja glasi $s(t + T/2) = -s(t)$ i onda imamo samo neparne harmonike u Furijeovom nizu.

- **Zadatak 8.** Pošto smo se upoznali sa svojstvima običnih pravougaonih impulsa i pomenuli kvadratne impulse, nastavićemo dalje sa njima. Dalje razmatranje je u cilju jasnijeg sagledavanja izbora mesta koordinatnog početka. Dakle, potrebno je da nadjemo izraz za Furijeov red povorke pravougaonih impulsa pozicioniranih kao na slici.



Najpre ćemo definisati analitički oblik funkcije koja predstavlja periodičnu povorku u ovom slučaju.

$$s(t)=\begin{cases} E & za \quad 0<t<\dfrac{3\theta}{4} \\ 0 & za \quad \dfrac{3\theta}{4}<t<T-\dfrac{\theta}{4} \\ E & za \quad T-\dfrac{\theta}{4}<t<T \end{cases}$$

- pri čemu je: $\theta = T/2$, odnosno $\alpha = 1/2$, jer je to povorka kva-dratnih impulsa. Za srednju vrenost ove povorke impulsa imamo: $S_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{E}{T}\left[\frac{3\theta}{4} + \frac{\theta}{4}\right] = \frac{E\theta}{T} = \alpha E$

- Prema tome imamo da je $S_0 = \frac{E}{2}$, jer je $\alpha = 1/2$ ili $\theta = T/2$

  .

  Dalje možemo naći i

$$Q_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos n\omega_1 t\, dt = \frac{2E}{T}\cdot\frac{1}{n\omega_1}\left(\sin n\omega_1 t \Big|_0^{3\theta/4} + \sin n\omega_1 t \Big|_{T-\theta/4}^{T}\right)$$

a pošto je $\theta = T/2$, dobijamo da je

$$Q_n = \frac{2E}{T n\omega_1}\left\{\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{3}{8}T\right) - 0 + \sin\left(n\frac{2\pi}{T}T\right) - \sin\left(\left(T - \frac{T}{8}\right)n\frac{2\pi}{T}\right)\right\}$$

$$Q_n = \frac{E}{n\pi}\left\{\sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

Analogno ovome za neparne članove dobijamo:

$$P_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin n\omega_1 t\,dt = \frac{2E}{T\,n\omega_1}\left\{-\cos n\omega_1 t \Big|_0^{3\theta/4} - \cos n\omega_1 t \Big|_{T-\theta/4}^{T}\right\}$$

$$P_n = \frac{2E}{T\,n\omega_1}\left\{1-\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{3}{8}T\right)-\cos\left(n\frac{2\pi}{T}T\right)+\cos\left(\left(T-\frac{T}{8}\right)n\frac{2\pi}{T}\right)\right\}$$

$$P_n = \frac{E}{n\pi}\left\{\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(n\frac{3\pi}{4}\right)\right\}$$

- Već sada možemo da se uverimo da bi izraz za Furijeov red bio glomazan. Ako se setimo da postoji nekoliko, na prvi pogled različitih oblika Furijeovog reda, onda, koristeći se oblikom:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=0}^{\infty} S_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

  i pratećim obrascima koji daju vezu između ova dva oblika Furijeovog reda, koji svakako moraju da predstavljaju istu funkciju, te da se u suštini svedu jedan na drugi, dobijamo koristeći odnose:

$$Q_n = S_n \cos\varphi_n \qquad S_n = \sqrt{P_n^2 + Q_n^2}$$

$$P_n = S_n \sin\varphi_n \qquad tg\varphi_n = -\frac{P_n}{Q_n}$$

da je amplituda *n*-tog harmonika data izrazom

$$S_n = \frac{2E}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

dok je faza određena izrazima

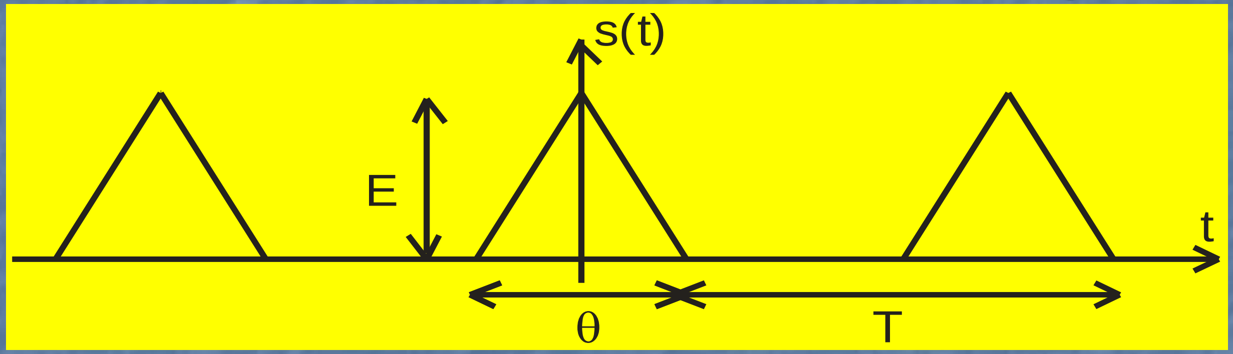
$$tg\varphi_n = -tg\left(n\frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi_n = -n\frac{\pi}{4}$$

Prema tome, Furijeov red za ovu povorku impulsa glasi:

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\left(\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(3\omega_1 t - \frac{3\pi}{4}\right) + ...\right)$$

- **Zadatak 9.** Zbog toga što propusni opseg realnih električnih kola i prenosnih sistema ima konačnu širinu, to se i pravougaoni impulsi, sa sasvim strmim ivicama ne mogu ostvariti. Realni impulsi su obično, trougaonog ili trapeznog oblika. Zbog pogodnosti rad, prvo ćemo posmatrati povorku trougaonih impulsa. Prema tome zadatak glasi
  - Analizirati povorku trougaonih impulsa i dati njen spektar.

  Radi olakšane analize impulsi mogu da se posmatraju kao parna funkcija. Povorka trougaonih impulsa koja je nacrtana na slici može se analitički zapisati kao



$$s(t)=\begin{cases} 0 & za \quad -\dfrac{T}{2}<t<-\dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{2Et}{\theta}+E & za \quad -\dfrac{\theta}{2}<t<0 \\ -\dfrac{2Et}{\theta}+E & za \quad 0<t<\dfrac{\theta}{2} \\ 0 & za \quad \dfrac{\theta}{2}<t<T \end{cases}$$

- Ovde odmah nalazimo da je

$$Q_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} s(t)dt = \frac{4E}{T}\int_0^{\theta/2}\left(1-\frac{2t}{\theta}\right)dt = \frac{4E}{T}\left[t-\frac{2t^2}{2\theta}\right]_0^{\theta/2} = \frac{4E\theta}{4T} = \alpha E$$

Pošto je funkcija parna, to je znači, $\boxed{P_n = 0}$ te ostaje da je

$$S_n = Q_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} s(t)\cos n\omega_1 t\, dt = \frac{4E}{T}\int_0^{\theta/2}\left(1-\frac{2t}{\theta}\right)\cos n\omega_1 t\, dt$$

$$Q_n = \frac{4E}{n\omega_1 T}\sin\left(n\omega_1\frac{\theta}{2}\right) - \frac{8E}{\theta T}\frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1}\Bigg|_0^{\theta/2} + \frac{8E}{\theta T}\int_0^{\theta/2}\frac{\sin n\omega_1 t}{n\omega_1}dt =$$

$$= \frac{8E}{n^2\omega_1^2\theta T}\left(1-\cos\left(n\omega_1\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{2E}{n^2\pi^2\alpha}\left(1-\cos(n\pi\alpha)\right)$$

$$Q_n = \frac{2\alpha E}{n^2\pi^2\alpha^2}\left[2\sin\left(\frac{n\pi\alpha}{2}\right)\right]^2 = \alpha E\left\{\frac{\sin\left(\frac{n\pi\alpha}{2}\right)}{\frac{n\pi\alpha}{2}}\right\}^2$$

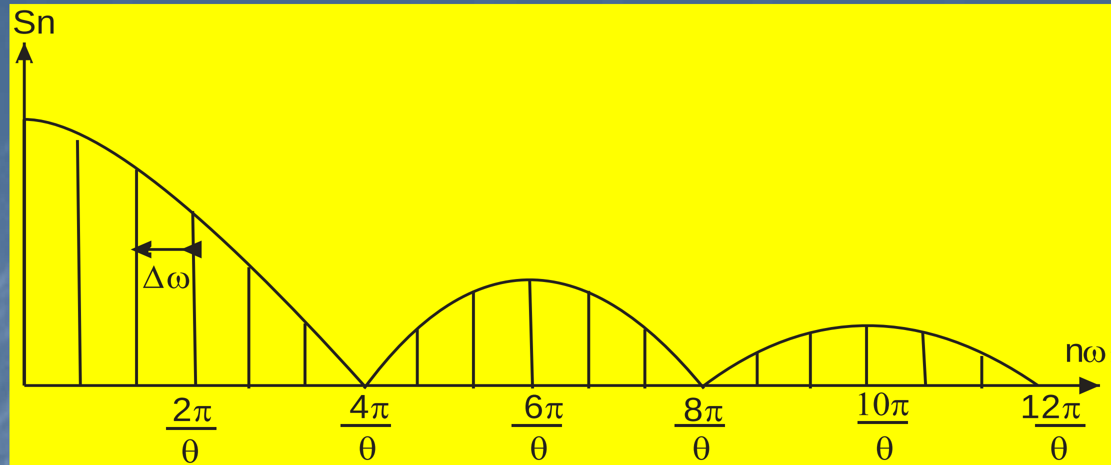
te Furijeov red za povorku trougaonih impulsa, prikazanih na slici glasi

$$s(t) = \frac{\alpha E}{2} + \alpha E \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\pi\alpha}{2}\right)}{\frac{n\pi\alpha}{2}} \right\}^2 \times \cos(n\,\omega_1\,t) \right\}$$

Spektralna predstava amplituda pojedinih harmonika u funkciji kružne učestanosti, može se predstaviti na sledeći način:

$$S_n = \alpha\ E \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n\pi\alpha}{2}\right)}{\frac{n\pi\alpha}{2}} \right\}^2$$

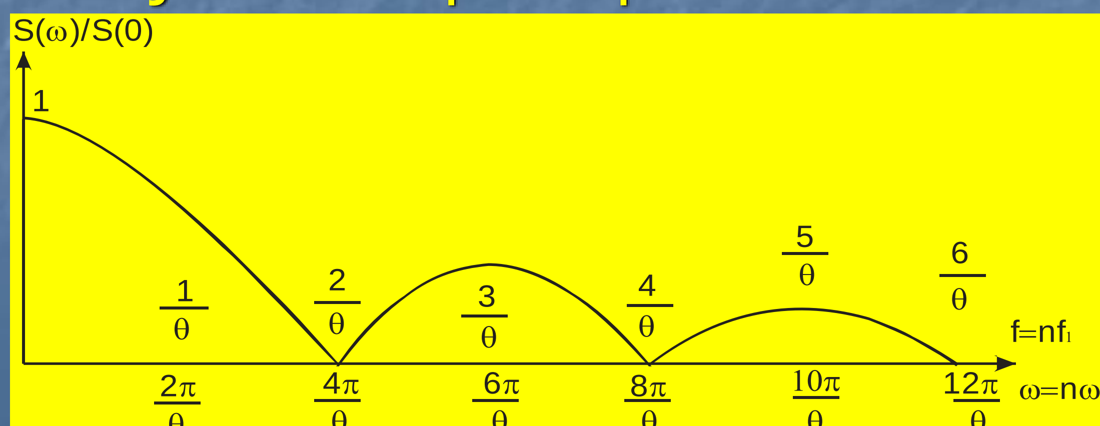
- Da bi ovaj spektar prikazali dijagramom potrebno je da na ordinatnu osu nanosimo amplitude pojedinih harmonika, a na apscisnu kružne učestanosti . Prema ovome diskretan spektar ima sledeći izgled.



- Nule spektra date su jednačinom: $n\,f_1 = \dfrac{2\,m}{\theta}$

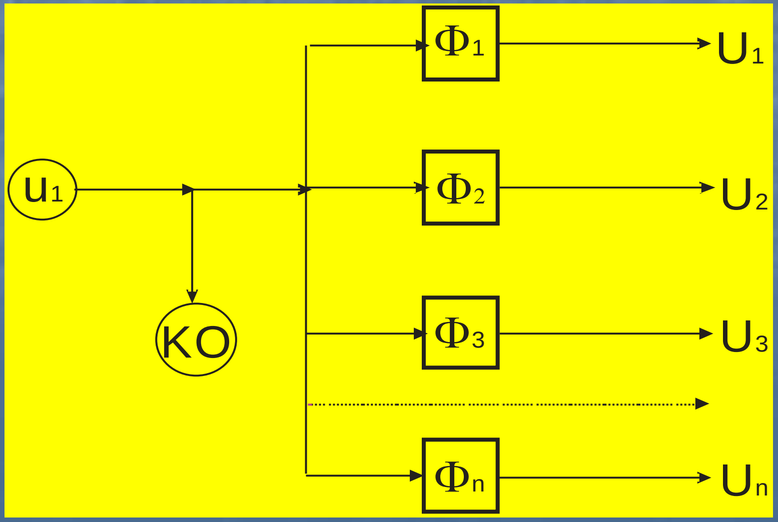
gde je $m = 1, 2, 3....$, a broj harmonika *n*-te nule iznosi $N = \dfrac{2}{\theta}n$

Dakle do prve nule ima $2/\theta$ harmonika. Za mali faktor režima spektar se može predstaviti ***anvelopom spektra***. Spektar predstavljen anvelopom spektra ima oblik



- **Zadatak 10.** Uprošćena blok šema uređaja za analizu signala $u_1(t)$ data je na slici. Oblik složenoperiodičog signala, napona $u_1(t)$, može da se posmatra sa katodnim osciloskopom, a izdvajanje pojedinih harmonika vrši se uskopojasnim filtrima Φ_1 do Φ_n. Filter Φ_1 propušta samo učestanost $f_1 = 10^3 Hz$, filter Φ_2 propušta samo učestanost $2f_1 = 2 \cdot 10^3 Hz$, a filter Φ_n propušta samo učestanost datu sa $nf_1 = n \cdot 10^3 Hz$.

  Iza pojedinih filtera nalaze se voltmetri za merenje odgovarajućih naizmeničnih napona od U_1 do U_n.



- Ovim uređajem vrši se analiza povorke impulsa koja ima osnovnu učestanost ponavljanja $f_1 = 10^3\,Hz$.
  - U prvom slučaju, napon $u_1(t)$ ima oblik povorke pravougaonih impulsa. Izmereni naponi su $U_1 = 30V$, $U_2 = 0V$, $U_3 = 10V$, ...
  - U drugom slučaju napon $u_1(t)$ ima oblik povorke trougaonih impulsa. Izmereni naponi su $U_1 = 36V$, $U_2 = 0V$, $U_3 = 4V$,...

  Potrebno je odrediti sve parametre $u_1(t)$ ulaznog signala za oba slučaja.

  Naponi koji su ovde izmereni voltmetrima, odgovaraju amplitudama pojedinih harmonika. To su naizmenični naponi, a voltmetri koji služe za merenje naizmeničnih veličina, mere efektivne vrednosti. Dakle, izmerene vrednosti na pojedinim voltmetrima, predstavljaju ustvari, efektivne vrednosti pojedinih harmonika.

- Da bi smo dobili amplitude tih harmonika treba treba pokazivanje voltmetra pomnožiti sa $\sqrt{2}$.
  - Amplituda n-tog harmonika je $S_n = 2\alpha\, E \dfrac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha}$

Imajući u vidu da je $S_2 = 0$ i $\sin 2\alpha\pi = 0$, dobijamo da je

$$2\alpha\pi = k\pi, \quad k = 0,1,2,3,\ldots \quad (\alpha < 1 \quad za\ \ pravougaone\ impulse)$$

Prema tome dozvoljeno je da usvojimo da je $\alpha = 0.5$, odakle sledi da je $k = 1$ .Ako ovu vrednost za faktor režima uvrstimo u izraz za amplitudu prvog harmonika, dobijamo da je

$$S_1 = \sqrt{2}\,U_1 = 2\frac{1}{2}E\,\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}$$

odnosno

$$\sqrt{2}\,U_1 = \frac{2E}{\pi} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\pi U_1 \sqrt{2}}{2} = 66{,}6\,[V]$$

- **Zadatak 11.** Radarski predajnik emituje skoro pravougaone impulse trajanja $\theta = 0.1\mu s$. Učestanost ponavljanja impulsa je $f = 1000\left[imp / \sec\right]$, a vršna snaga u impulsu (pri opterećenju od $R = 50\,\Omega$) iznosi $P_{\max} = 500\left[kW\right]$.
  - Kolika mora biti širina propusnog opsega Δf radarskog antenskog sistema (napojni vod-antena) da bi se u slučaju potpunog prilagođenja očuvalo 95% od ukupne energije povorke impulsa.
  - Kolika će biti srednja snaga koju emituje antena, ako predpostavimo da prenosno slabljenje *b* antenskog sistema u posmatranom opsegu iznosi prosečno 0.5 dB, a da je otpor zračenja antene $R_A = 50\left[\Omega\right]$.
  - pod pretpostavkom da je propusni opseg radarskog antenskog sistema jednak širini prve arkade spektra signala $\Delta f = 2/\theta = 2/10^{-7} = 2\cdot 10^{7}\left[Hz\right] = 20\left[MHz\right]$

$$E_1^2 = P_{max}\, R = 500 \cdot 10^3 \cdot 50 = 25 \cdot 10^6 \left[V^2\right] \quad \Rightarrow \quad E_1 = 5 \cdot 10^3 \left[V\right]$$

$$b = 20 \log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 0.5\left[dB\right] \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 0.025 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = 10^{0.025} = 1.059$$

$$P_{A\max} = \frac{E_2^2}{R_A} = 450\left[kW\right]$$

$$E_2 = \frac{E_1}{1.059} = \frac{5000}{1.059} = 4720\left[V\right]$$

$$\alpha = \frac{\theta}{T} = \frac{10^{-7}}{10^{-3}} = 10^{-4}$$

$$P_{A\,sr} = \alpha\, P_{A\max} = 450 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} = 45\left[W\right]$$

- Analogno prethodnom slučaju, iz jednačine koja određuje drugi harmonik, imajući u vidu da je

$$S_2 = \alpha\ E\left\{\frac{\sin\left(\frac{2\pi\alpha}{2}\right)}{\frac{2\pi\alpha}{2}}\right\}^2 = \alpha\ E\left\{\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}\right\}^2 = 0 \qquad \sin\alpha\pi = 0$$

dobijamo da je

$$\alpha\pi = k\pi, \quad k = 0,1,2,3,\ldots \quad \left(\alpha \leq 1 \quad za\ \ pravougaone\ impulse\right)$$

Pošto je dozvoljeno da usvojimo da je $k = 1$, imamo da je $\alpha = 1$

- slučaj kada se trougaoni impulsi dodiruju.

Iz izraza za amplitudu prvog harmonika dobijamo:

$$S_1 = \sqrt{2}U_1 = \alpha\ E\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\frac{\pi\alpha}{2}}\right\}^2 = E\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\right\}^2$$

odnosno

$$\sqrt{2}U_1 = \frac{4E}{\pi^2} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\pi^2 U_1\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi^2\, 36\sqrt{2}}{4} = 125.5\ [V]$$

- Perioda ponavljanja i jednih i drugih impulsa je

$$T = \frac{1}{f_1} = 10^{-3}\left[s\right] = 1\left[ms\right]$$

Trajanje impulsa, izraženo preko faktora režima i učestanosti dato je izrazom $\theta = \alpha T$, te je, za pravougaone impulse

$$\theta_{pravougaono} = T/2 = 0,5\left[ms\right]$$

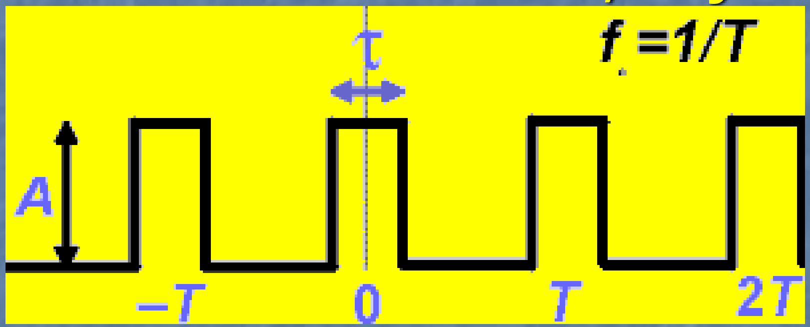
a za trougaone

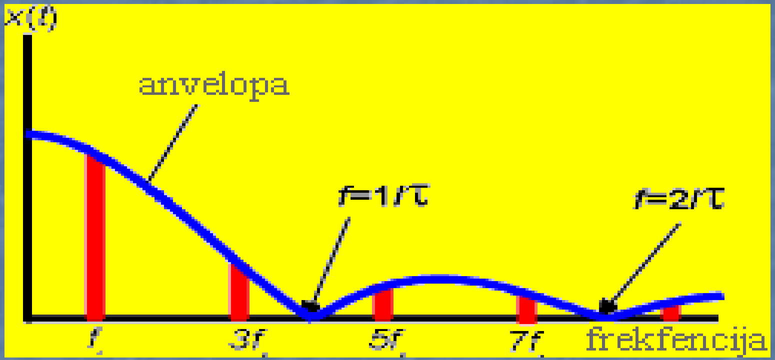
$$\theta_{trougaono} = T = 1\left[ms\right]$$

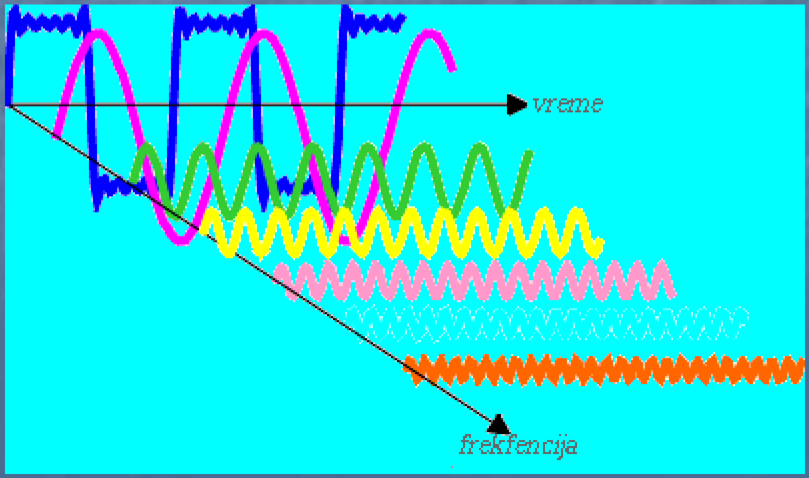
.

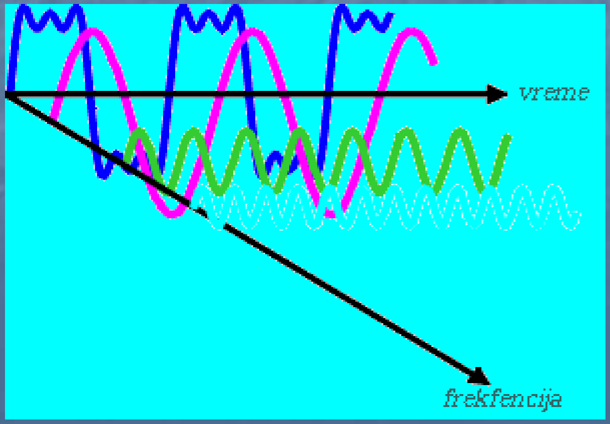
KOJI SU HARMONICI ZNAČAJNI ZA OČUVANJE OBLIKA PERIODIČNIH SIGNALA?

- Obično u praksi, kanal ima konačnu širinu propusnog opsega, tako da očekujemo da će na mesto prijema stići replika ulaznog signala, sa konačnim brojem multipla osnovne učestanosti, najčešće 3.



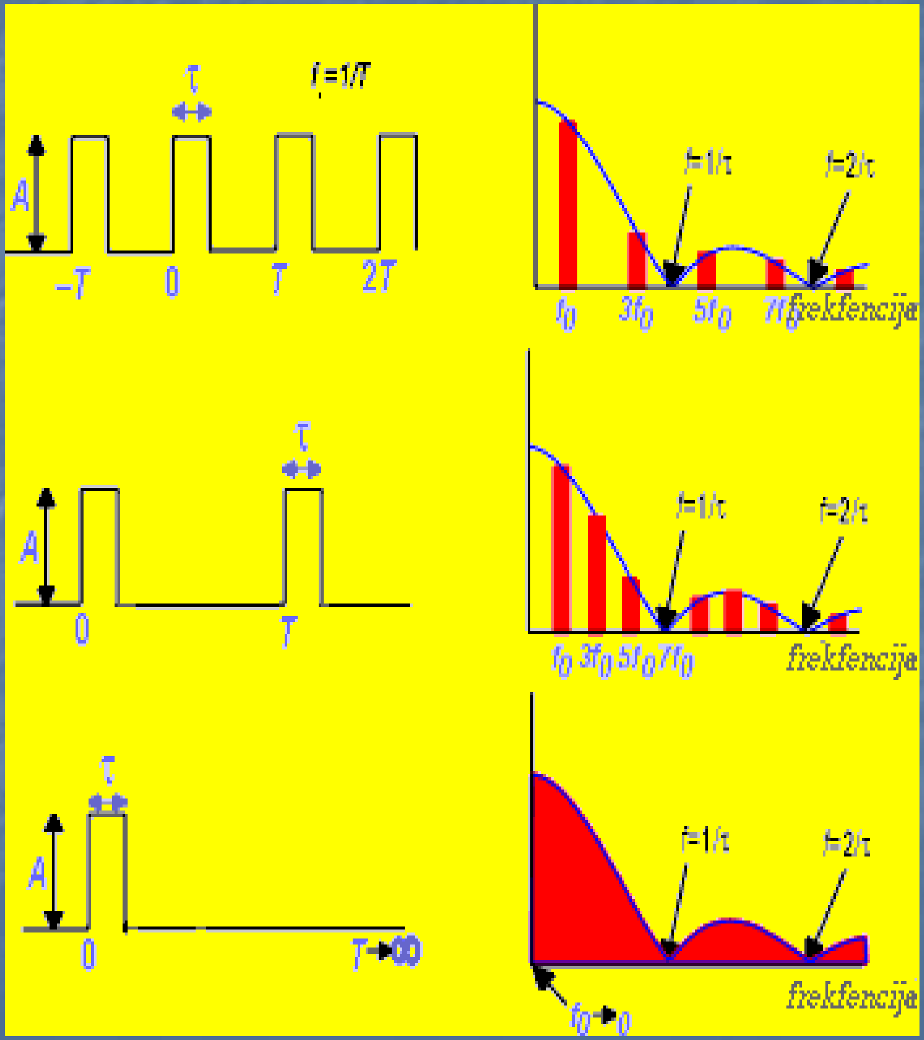




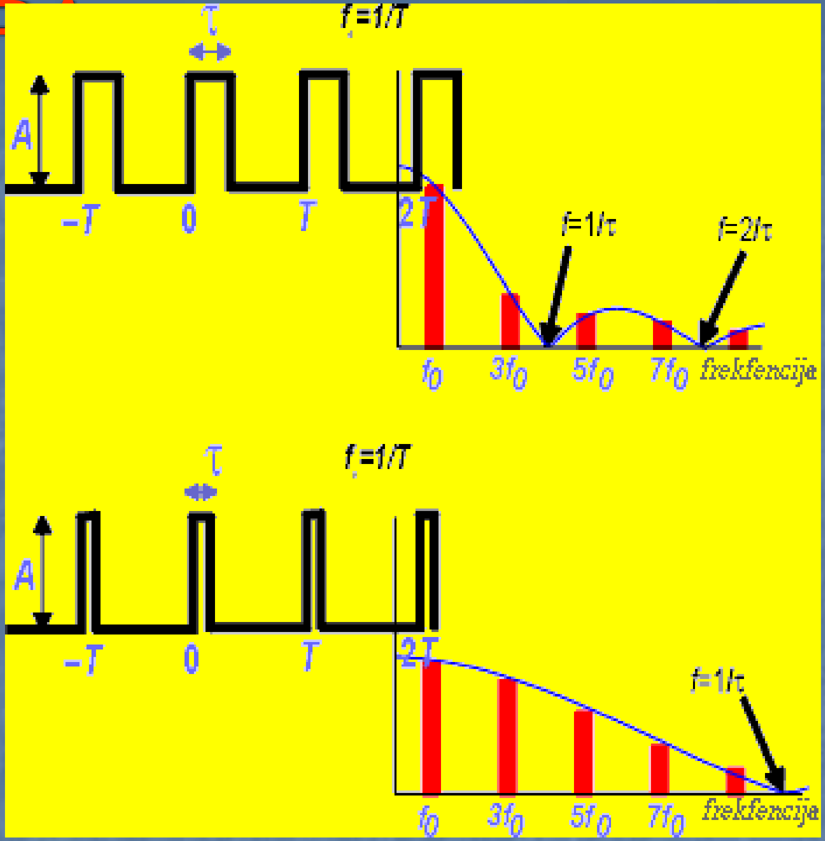


UTICAJ VELIČINE PERIODE NA OBLIK SPEKTRA

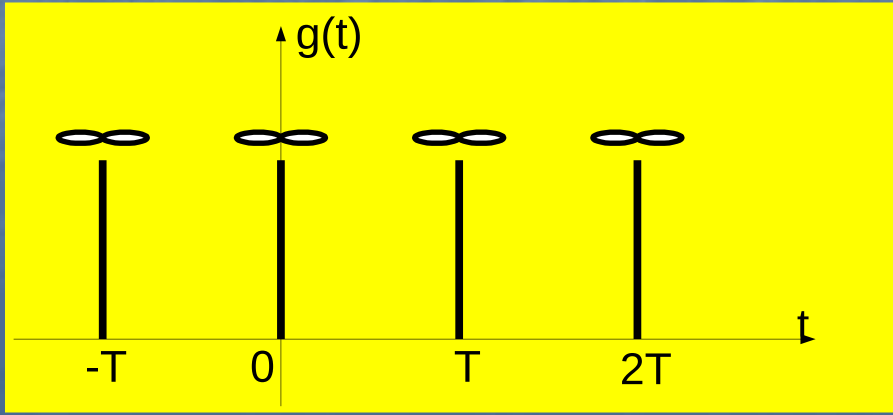
- Kada se osnovna perioda *T*, signala u vremenskom domenu poveća, osnovna učestanost se smanjuje, a komponente postaju bliže jedna drugoj. U graničnom slučaju kada je *T* veliko, aproksimativno infinitivno, prostor između harmonika infinitivno mali, tako da je spektar u suštini kontinualan.



UTICAJ TRAJANJA IMPULSA NA OBLIK SPEKTR



- За исту периоду T, смањење трајања импулса резултује повећање виших хармоника на рачун нижих. У граничном случају, када $\Theta \rightarrow 0$, дакле периодична *делта функција g(t)*, можемо очекивати да ће се амплитуде смањити и имати константну вредност.



UTICAJ OBLIKA IMPULSA U PERIODIČNOM SIGNALU NA ŠIRINU SPEKTRA